Naloga T–1

Naj $\mathbb{Z}$ označuje množico vseh celih števil in naj $\mathbb{Z}_{>0}$ označuje množico vseh naravnih števil.

(a) Funkciji $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ki zadošča enakosti $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ za vsa $a, b \in \mathbb{Z}$, pravimo $\mathbb{Z}$-*nedolžna*. Poišči največje možno število različnih vrednosti, ki se lahko pojavijo med $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, kjer je f neka $\mathbb{Z}$-nedolžna funkcija.

(b) Funkciji $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$, ki zadošča enakosti $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ za vsa $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, pravimo $\mathbb{Z}_{>0}$-*uročena*. Poišči največje možno število različnih vrednosti, ki se lahko pojavijo med $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, kjer je f neka $\mathbb{Z}_{>0}$-uročena funkcija.

Naloga T–2

Naj bodo a, b, c in d pozitivna realna števila, za katera velja $abcd = 1$. Dokaži, da je

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geqslant 4$$

in poišči vse take četverice (a, b, c, d), za katere je dosežena enakost.

Naloga T–3

Določi najmanjše naravno število b, ki zadošča naslednjemu pogoju: Za vsako obarvanje natanko b polj na 8×8 šahovnici zeleno, lahko postavimo 7 lovcev na 7 zelenih polj, tako da se nobena dva lovca ne napadata.

Opomba. Lovca se napada če sta na isti diagonali.

Naloga T–4

Naj bo $c \geqslant 4$ sodo število. V nogometni ligi ima vsaka ekipa domač in gostujoč dres. Vsak domač dres je dvobarven, vsak gostujoči pa enobarven. Za nobeno ekipo se ista barva ne pojavi tako na domačem, kot na gostujočem dresu. Vsi dresi uporabijo največ c različnih barv. Če imata dve ekipi enak par barv na domačih uniformah, morata imeti različni barvi na gostujočih uniformah.

Za par uniform rečemo, da se *križata*, če se na obeh pojavi ista barva. Denimo, da za vsako ekipo X v ligi, ne obstaja taka ekipa Y v ligi, za katero se domač dres X križa z obema dresoma ekipe Y. Določi največje možno število ekip v ligi.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.

Naloga T–5

Dan je konveksni štirikotnik $ABCD$, v katerem notranji koti niso pravi. Denimo, da obstajajo točke P, Q, R, S, zaporedoma na stranicah AB, BC, CD, DA, za katere velja $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Denimo, da so poleg tega premice PR, SQ, AC konkurentne. Dokaži, da so P, Q, R, S koniciklične.

Naloga T–6

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, v katerem velja $|AB| < |AC|$. Naj bo J središče A-pričrtane krožnice trikotniku ABC. Naj bo D pravokotna projekcija J na stranico BC. Simetrali notranjih kotov $\sphericalangle BDJ$ in $\sphericalangle JDC$ sekata BJ in JC zaporedoma v točkah X in Y. Daljici XY in JD se sekata v P. Naj bo Q pravokotna projekcija A na BC. Dokaži, da je simetrala notranjega kota $\sphericalangle QAP$ pravokotna na XY.

Opomba. A-pričrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica, tangentna na premici AB,AC in daljico BC, ki leži zunaj trikotnika ABC.

Naloga T–7

Določi vsa naravna števila n, za katere obstajata pozitivni števili $a > b$, da velja

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Naloga T–8

Naj bosta A in B naravni števili in naj bo $(x_n)_{n \geqslant 1}$ zaporedje naravnih števil, za katero velja

$$x_{n+1} = A \cdot \mathrm{D}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{za vsak } n \geqslant 2.$$

Dokaži, da je zaporedje $(x_n)_{n \geqslant 1}$ zavzame le končno mnogo različnih vrednosti.

Opomba. Tu z $\mathrm{D}(a, b)$ označimo največji skupni delitelj naravnih števil a in b.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.