Úloha T–1

Nech $\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel a $\mathbb{Z}_{>0}$ množinu všetkých kladných celých čísel.

(a) Funkcia $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sa nazýva $\mathbb{Z}$-*ilinská*, pokiaľ spĺňa $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$. Určte najväčší možný počet navzájom rôznych čísel, ktoré sa môžu nachádzať medzi $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, kde f je $\mathbb{Z}$-ilinská funkcia.

(b) Funkcia $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ sa nazýva $\mathbb{Z}_{>0}$-*ilinská*, pokiaľ spĺňa $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Určte najväčší možný počet navzájom rôznych čísel, ktoré sa môžu nachádzať medzi $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, kde f je $\mathbb{Z}_{>0}$-ilinská funkcia.

Úloha T–2

Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce $abcd = 1$. Dokážte, že

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4$$

a nájdite všetky štvorice (a, b, c, d), pre ktoré nastáva rovnosť.

Úloha T–3

Nájdite najmenšie celé číslo b s nasledujúcou vlastnosťou: Pre každé ofarbenie práve b políčok na šachovnici rozmerov 8×8 na zeleno je možné umiestniť 7 strelcov na 7 zelených políčok tak, aby sa žiadni dvaja strelci neohrozovali.

Poznámka. Dvaja strelci sa ohrozujú, ak sa nachádzajú na rovnakej diagonále.

Úloha T–4

Nech $c \geq 4$ je párne celé číslo. V Slovenskej futbalovej lige má každý klub domáci a hosťovský dres. Každý domáci dres je ofarbený dvomi rôznymi farbami, kým každý hosťovský dres je ofarbený jednou farbou. Farba hosťovského dresu klubu sa musí líšiť od oboch farieb jeho domáceho dresu. Na všetkých dresoch dokopy je nanajvýš c rôznych farieb. Ak majú dva tímy rovnaké obe farby na ich domácich dresoch, potom majú rôzne farby na ich hosťovských dresoch.

Hovoríme, že pár dresov *sa bije*, ak sa nejaká farba vyskytuje na oboch dresoch. Predpokladajme, že pre každý tím X v lige platí, že neexistuje v lige tím Y taký, že domáci dres tímu X sa bije s oboma dresmi tímu Y. Nájdite najväčší možný počet tímov v lige.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–5

Majme konvexný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhly nie sú pravé. Predpokladajme, že body P, Q, R, S ležia postupne na jeho stranách AB, BC, CD, DA tak, že platí $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Navyše predpokladajme, že sa priamky PR, SQ, AC pretínajú v jednom bode. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici.

Úloha T–6

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, kde $|AB| < |AC|$. Nech J je stred kružnice pripísanej k strane BC a D kolmý priemet bodu J na stranu BC. Osi uhlov BDJ a JDC pretínajú priamky BJ a JC postupne v bodoch X a Y. Úsečky XY a JD sa pretínajú v bode P. Nech Q je kolmý priemet bodu A na priamku BC. Dokážte, že os uhla QAP je kolmá na priamku XY.

Poznámka. Kružnica pripísaná k strane BC trojuholníka ABC je kružnica mimo trojuholníka, ktorá sa dotýka priamok AB, AC a úsečky BC.

Úloha T–7

Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú kladné celé čísla $a > b$ spĺňajúce:

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Úloha T–8

Nech A a B sú kladné celé čísla. Uvažujme postupnosť kladných celých čísel $(x_n)_{n\geq 1}$ takú, že

$$x_{n+1} = A \cdot \mathrm{D}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{pre všetky } n \geq 2.$$

Dokážte, že táto postupnosť dosahuje len konečne veľa rôznych hodnôt.

Poznámka. Zápis $\mathrm{D}(a, b)$ značí najväčšieho spoločného deliteľa kladných celých čísel a, b.