Zadanie T–1

Niech $\mathbb{Z}$ będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a $\mathbb{Z}_{>0}$ – zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych.

(a) Funkcję $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nazywamy $\mathbb{Z}$-*dobrą*, jeżeli zachodzi $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Z}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych wartości wśród liczb $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, gdzie f jest $\mathbb{Z}$-dobrą funkcją.

(b) Funkcję $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ nazywamy $\mathbb{Z}_{>0}$-*dobrą*, jeżeli zachodzi $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ dla wszystkich $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych wartości wśród liczb $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, gdzie f jest $\mathbb{Z}_{>0}$-dobrą funkcją.

Zadanie T–2

Niech a, b, c, d będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $abcd = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geqslant 4$$

i wyznaczyć wszystkie czwórki (a, b, c, d), dla których zachodzi równość.

Zadanie T–3

Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą b o następującej własności: dla każdego pokolorowania dokładnie b pól szachownicy 8×8 na zielono, można postawić 7 gońców na siedmiu zielonych polach w taki sposób, aby gońce wzajemnie się nie atakowały.

Uwaga. Dwa gońce atakują się nawzajem, jeśli znajdują się na tej samej przekątnej.

Zadanie T–4

Niech $c \geqslant 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W lidze piłkarskiej każda drużyna ma strój domowy i strój wyjazdowy. Każdy strój domowy jest dwukolorowy, a strój wyjazdowy – jednokolorowy. Strój wyjazdowy drużyny nie może być tego samego koloru co żaden z kolorów jej stroju domowego. Na strojach wszystkich drużyn pojawia się co najwyżej c różnych kolorów. Jeśli dwie drużyny mają taki sam zestaw kolorów na strojach domowych, to ich stroje wyjazdowe są różnych kolorów.

Powiemy, że para strojów się *gryzie*, jeśli jakiś kolor pojawia się na obydwu z nich. Załóżmy, że dla żadnej drużyny X w lidze nie istnieje taka drużyna Y w lidze, że strój domowy X gryzie się z obydwoma strojami Y. Znaleźć maksymalną możliwą liczbę drużyn w lidze.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.

Zadanie T–5

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym żaden z kątów nie jest prosty. Załóżmy, że istnieją takie punkty P, Q, R, S odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD, DA, że $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Ponadto załóżmy, że proste PR, SQ i AC przecinają się w jednym punkcie. Udowodnić, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Zadanie T–6

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu J na prostą BC. Dwusieczne kątów BDJ i JDC przecinają proste BJ i JC odpowiednio w punktach X i Y. Punkt P jest punktem przecięcia odcinków XY i JD, a punkt Q rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC. Udowodnić, że dwusieczna kąta QAP jest prostopadła do prostej XY.

Uwaga. Okrąg dopisany styczny do boku BC to okrąg styczny do prostych AB, AC i odcinka BC, znajdujący się na zewnątrz trójkąta ABC.

Zadanie T–7

Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których istnieją dodatnie liczby całkowite $a > b$ spełniające

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Zadanie T–8

Niech A, B będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciąg $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dodatnich liczb całkowitych spełniający

$$x_{n+1} = A \cdot \mathrm{NWD}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{dla każdego } n \geqslant 2.$$

Udowodnić, że ten ciąg przyjmuje tylko skończenie wiele różnych wartości.

Uwaga. Przez $\mathrm{NWD}(a, b)$ oznaczamy największy wspólny dzielnik dodatnich liczb całkowitych a i b.