



### Zadanie T-1

Niech  $\mathbb{Z}$  będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, a  $\mathbb{Z}_{>0}$  – zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych.

- (a) Funkcję  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  nazywamy  $\mathbb{Z}$ -dobrą, jeżeli zachodzi  $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$  dla wszystkich  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych wartości wśród liczb  $f(1), f(2), \dots, f(2023)$ , gdzie  $f$  jest  $\mathbb{Z}$ -dobrą funkcją.
- (b) Funkcję  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  nazywamy  $\mathbb{Z}_{>0}$ -dobrą, jeżeli zachodzi  $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$  dla wszystkich  $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych wartości wśród liczb  $f(1), f(2), \dots, f(2023)$ , gdzie  $f$  jest  $\mathbb{Z}_{>0}$ -dobrą funkcją.

### Zadanie T-2

Niech  $a, b, c, d$  będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi  $abcd = 1$ . Udowodnić, że

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4$$

i wyznaczyć wszystkie czwórki  $(a, b, c, d)$ , dla których zachodzi równość.

### Zadanie T-3

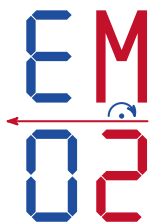
Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą  $b$  o następującej własności: dla każdego pokolorowania dokładnie  $b$  pól szachownicy  $8 \times 8$  na zielono, można postawić 7 gońców na siedmiu zielonych polach w taki sposób, aby gońce wzajemnie się nie atakowały.

*Uwaga.* Dwa gońce atakują się nawzajem, jeśli znajdują się na tej samej przekątnej.

### Zadanie T-4

Niech  $c \geq 4$  będzie parzystą liczbą całkowitą. W lidze piłkarskiej każda drużyna ma strój domowy i strój wyjazdowy. Każdy strój domowy jest dwukolorowy, a strój wyjazdowy – jednokolorowy. Strój wyjazdowy drużyny nie może być tego samego koloru co żaden z kolorów jej stroju domowego. Na strojach wszystkich drużyn pojawia się co najwyżej  $c$  różnych kolorów. Jeśli dwie drużyny mają taki sam zestaw kolorów na strojach domowych, to ich stroje wyjazdowe są różnych kolorów.

Powiemy, że para strojów się *gryzie*, jeśli jakiś kolor pojawia się na obydwu z nich. Załóżmy, że dla żadnej drużyny  $X$  w lidze nie istnieje taka drużyna  $Y$  w lidze, że strój domowy  $X$  gryzie się z obydwojoma strojami  $Y$ . Znaleźć maksymalną możliwą liczbę drużyn w lidze.



**Zadanie T-5**

Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym żaden z kątów nie jest prosty. Załóżmy, że istnieją takie punkty  $P, Q, R, S$  odpowiednio na odcinkach  $AB, BC, CD, DA$ , że  $PS \parallel BD$ ,  $SQ \perp BC$ ,  $PR \perp CD$ . Ponadto załóżmy, że proste  $PR, SQ$  i  $AC$  przecinają się w jednym punkcie. Udowodnić, że punkty  $P, Q, R, S$  leżą na jednym okręgu.

**Zadanie T-6**

Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ , w którym  $AB < AC$ . Punkt  $J$  jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku  $BC$ . Punkt  $D$  jest rzutem prostokątnym punktu  $J$  na prostą  $BC$ . Dwusieczne kątów  $BDJ$  i  $JDC$  przecinają proste  $BJ$  i  $JC$  odpowiednio w punktach  $X$  i  $Y$ . Punkt  $P$  jest punktem przecięcia odcinków  $XY$  i  $JD$ , a punkt  $Q$  rzutem prostokątnym punktu  $A$  na prostą  $BC$ . Udowodnić, że dwusieczna kąta  $QAP$  jest prostopadła do prostej  $XY$ .

*Uwaga.* Okrąg dopisany styczny do boku  $BC$  to okrąg styczny do prostych  $AB, AC$  i odcinka  $BC$ , znajdujący się na zewnątrz trójkąta  $ABC$ .

**Zadanie T-7**

Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$ , dla których istnieją dodatnie liczby całkowite  $a > b$  spełniające

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

**Zadanie T-8**

Niech  $A, B$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciąg  $(x_n)_{n \geq 1}$  dodatnich liczb całkowitych spełniający

$$x_{n+1} = A \cdot \text{NWD}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{dla każdego } n \geq 2.$$

Udowodnić, że ten ciąg przyjmuje tylko skończenie wiele różnych wartości.

*Uwaga.* Przez  $\text{NWD}(a, b)$  oznaczamy największy wspólny dzielnik dodatnich liczb całkowitych  $a$  i  $b$ .