Užduotis T–1

Visų sveikųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{Z}$, o visų teigiamų sveikųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{Z}_{>0}$.

(a) Funkciją $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vadinsime $\mathbb{Z}$-*gerąja*, jei $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ su visais $a, b \in \mathbb{Z}$. Nustatykite, kiek daugiausiai skirtingų reikšmių gali būti rinkinyje $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2023)$, kai f yra $\mathbb{Z}$-geroji funkcija.

(b) Funkciją $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ vadinsime $\mathbb{Z}_{>0}$-*gerąja*, jei $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ su visais $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Nustatykite, kiek daugiausiai skirtingų reikšmių gali būti rinkinyje $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2023)$, kai f yra $\mathbb{Z}_{>0}$-geroji funkcija.

Užduotis T–2

Duota, kad realieji skaičiai a, b, c, d yra teigiami ir kad $abcd = 1$. Įrodykite, kad

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4,$$

ir nustatykite visus atitinkamus skaičių ketvertus (a, b, c, d), kuriems ši nelygybė virsta lygybe.

Užduotis T–3

Raskite mažiausią natūralųjį skaičių b, kuriam teisingas teiginys: 8×8 šachmatų lentoje bet kaip pasirinkus lygiai b langelių ir nudažius juos žaliai, visada galima taip pastatyti 7 rikius 7 žaliuose langeliuose, kad jokie du rikiai vienas kito nekirstų.

Pastaba. Du rikiai kerta vienas kitą, kai yra vienoje įstrižainėje.

Užduotis T–4

Duotas natūralusis lyginis skaičius $c \geq 4$. Vienos futbolo lygos kiekviena komanda turi dvi aprangas: dvispalvę namų aprangą (kurios dvi spalvos skirtingos) ir vienspalvę išvykos aprangą. Komandos išvykos aprangos spalva negali sutapti su jokia tos komandos namų aprangos spalva. Visoms aprangoms panaudota ne daugiau nei c skirtingų spalvų. Jei dviejų komandų namų aprangos yra tų pačių dviejų spalvų, tai jų išvykos aprangų spalvos nesutampa.

Aprangų porą vadinsime *nedarnia*, jei jos turi bendrą spalvą. Tarkime, kad šioje futbolo lygoje jokiai komandai X nėra tokios komandos Y, kurios abi aprangos sudarytų nedarnias poras su X namų apranga. Nustatykite didžiausią galimą lygos komandų skaičių.

Užduotis T–5

Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$, kurio joks kampas nėra statusis. Tarkime, kad egzistuoja taškai P, Q, R, S, atitinkamai esantys kraštinėse AB, BC, CD, DA, kuriems $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Be to, tarkime, kad tiesės PR, SQ ir AC kertasi viename taške. Įrodykite, kad taškai P, Q, R, S priklauso vienam apskritimui.

Užduotis T–6

Trikampis ABC smailusis, čia $AB < AC$. Taškas J yra trikampio ABC pribrėžtinio apskritimo prieš viršūnę A centras. Taškas D yra iš J į tiesę BC nuleisto statmens pagrindas. Kampo BDJ (vidinė) pusiaukampinė kerta tiesę BJ taške X, o kampo JDC (vidinė) pusiaukampinė kerta tiesę JC taške Y. Atkarpos XY ir JD kertasi taške P. Taškas Q yra iš A į tiesę BC nuleisto statmens pagrindas. Įrodykite, kad kampo QAP (vidinė) pusiaukampinė statmena tiesei XY.

Pastaba. Trikampio ABC pribrėžtinis apskritimas prieš viršūnę A yra toks apskritimas, kuris yra trikampio ABC išorėje ir liečia atkarpą BC bei tieses AB ir AC.

Užduotis T–7

Raskite visus natūraliuosius skaičius n, kuriems egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a ir b, kad $a > b$ ir

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Užduotis T–8

Duoti natūralieji skaičiai A ir B. Nagrinėkime tokią natūraliųjų skaičių seką $(x_n)_{n\geq 1}$, kad

$$x_{n+1} = A \cdot \mathrm{DBD}\,(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{kiekvienam } n \geq 2.$$

Įrodykite, kad šioje sekoje skirtingų reikšmių skaičius tėra baigtinis.

Pastaba. Čia $\mathrm{DBD}\,(a,b)$ žymi natūraliųjų skaičių a ir b didžiausią bendrąjį daliklį.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.