T–1. Feladat

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, és jelölje $\mathbb{Z}_{>0}$ a pozitív egész számok halmazát.

(a) Nevezzünk egy $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt $\mathbb{Z}$-*jónak*, ha $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ minden $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén. Határozzátok meg a legnagyobb számot, ahány különböző érték előfordulhat az $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$ számok között egy $\mathbb{Z}$-jó f függvény esetén.

(b) Nevezzünk egy $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ függvényt $\mathbb{Z}_{>0}$-*jónak*, ha $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ minden $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ esetén. Határozzátok meg a legnagyobb számot, ahány különböző érték előfordulhat az $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$ számok között egy $\mathbb{Z}_{>0}$-jó f függvény esetén.

T–2. Feladat

Legyenek a, b, c és d olyan pozitív valós számok, melyekre $abcd = 1$. Bizonyítsátok be, hogy

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4,$$

és határozzátok meg az összes olyan (a, b, c, d) számnégyest, melyre egyenlőség áll fenn.

T–3. Feladat

Keressétek meg a legkisebb b egész számot, mely teljesíti a következő tulajdonságot. Bárhogyan is színezünk b mezőt zöldre egy 8×8-as sakktáblán, le lehet helyezni 7 futót zöldre színezett mezőkre úgy, hogy semelyik két lehelyezett futó ne üsse egymást.

Megjegyzés: Két futó akkor üti egymást, ha ugyanazon az átlón helyezkednek el.

T–4. Feladat

Legyen $c \geq 4$ egy páros egész szám. Egy focibajnokságban minden csapatnak van egy hazai meze és egy idegenbeli meze. Minden hazai meznek két különböző színe van, és minden idegenbeli meznek egy színe van. Minden csapat idegenbeli mezének a színe különbözik a hazai mez mindkét színétől. Összesen a mezek között legfeljebb c különböző szín szerepel. Ha két csapatnak ugyanaz a két szín van a hazai mezén, akkor az idegenbeli mezük eltérő színű.

Azt mondjuk, hogy két mez *üti egymást*, ha van olyan szín, ami mindkettőn megjelenik. Tegyük fel, hogy a bajnokság bármely X csapatához nincs olyan Y csapat a bajnokságban, hogy X hazai meze üti Y mindkét mezét. Határozzátok meg a legnagyobb számot, ahány csapat szerepelhet a bajnokságban.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen $ABCD$ olyan konvex négyszög, melynek egyik szöge sem derékszög. Tegyük fel, hogy a P, Q, R és S pontok rendre az AB, BC, CD és DA oldalakon helyezkednek el úgy, hogy $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$ és $PR \perp CD$. Tegyük fel továbbá, hogy a PR, SQ és AC egyenesek egy ponton mennek át. Bizonyítsátok be, hogy a P, Q, R és S pontok egy körre esnek.

T–6. Feladat

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melyben $AB < AC$. Jelölje J az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt körének a középpontját. Jelölje D a J pont merőleges vetületét a BC egyenesen. A BDJ, illetve JDC szögek belső szögfelezői a BJ, illetve JC szakaszokat rendre az X, illetve Y pontokban metszik. Jelölje P az XY és JD szakaszok metszéspontját. Legyen Q az A pont merőleges vetülete a BC egyenesen. Bizonyítsátok be, hogy a QAP szög belső szögfelezője merőleges az XY egyenesre.

Megjegyzés: Az ABC háromszög A-val szemközti hozzáírt köre az a kör, ami a háromszögön kívülre esik, érinti az AB és AC egyeneseket, és érinti a BC szakaszt.

T–7. Feladat

Találjátok meg az összes olyan n pozitív egész számot, melyre léteznek olyan $a > b$ pozitív egész számok, hogy

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

T–8. Feladat

Legyenek A és B pozitív egész számok. Legyen $(x_n)_{n\geq 1}$ olyan pozitív egész számokból álló sorozat, melyre

$$x_{n+1} = A \cdot \operatorname{lnko}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{minden } n \geq 2 \text{ esetén.}$$

Bizonyítsátok be, hogy a sorozatban csak véges sok különböző érték szerepel.

Megjegyzés: $\operatorname{lnko}(a,b)$ *az a és b számok legnagyobb közös osztóját jelöli.*