Aufgabe T–1

Seien $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen und $\mathbb{Z}_{>0}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen.

(a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ heiße $\mathbb{Z}$-*ilinisch*, falls für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ gilt. Bestimme die größtmögliche Anzahl paarweise verschiedener Werte unter $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, wobei f eine $\mathbb{Z}$-ilinische Funktion ist.

(b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ heiße $\mathbb{Z}_{>0}$-*ilinisch*, falls für alle $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ die Gleichung $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ gilt. Bestimme die größtmögliche Anzahl paarweise verschiedener Werte unter $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, wobei f eine $\mathbb{Z}_{>0}$-ilinische Funktion ist.

Aufgabe T–2

Seien a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $abcd = 1$. Zeige, dass

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4$$

gilt, und bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), für die Gleichheit gilt.

Aufgabe T–3

Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8×8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen stehen.

Aufgabe T–4

Sei $c \geq 4$ eine gerade ganze Zahl. In einer Fußball-Liga hat jedes Team ein Heim- und ein Auswärts-Trikot. Jedes Heim-Trikot hat genau zwei verschiedene Farben, und jedes Auswärts-Trikot ist einfarbig. Das Auswärts-Trikot eines Teams darf keine der Farben seines Heim-Trikots haben. Für alle Trikots in der Liga werden insgesamt höchstens c verschiedene Farben verwendet. Falls zwei Teams dieselben zwei Farben auf ihrem Heim-Trikot haben, dann haben ihre Auswärts-Trikots verschiedene Farben.

Wir sagen, ein Paar von Trikots *beißt sich*, wenn eine Farbe auf beiden Trikots vorkommt. Angenommen, für jedes Team X in der Liga gebe es kein Team Y in der Liga, sodass sich das Heim-Trikot von X mit beiden Trikots von Y beißt. Bestimme die größtmögliche Anzahl von Teams in der Liga.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

Aufgabe T–5

Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ ohne rechte Innenwinkel. Es gebe Punkte P, Q, R und S so auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA, dass $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$ und $PR \perp CD$ gelten. Außerdem sei angenommen, dass sich die drei Geraden PR, SQ und AC in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Zeige, dass die Punkte P, Q, R und S auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe T–6

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Sei J der Mittelpunkt des A-Ankreises von ABC. Sei D der Fußpunkt des Lotes von J auf die Gerade BC. Die Innenwinkelhalbierenden (Innenwinkelsymmetralen) der Winkel $\sphericalangle BDJ$ und $\sphericalangle JDC$ schneiden die Geraden BJ bzw. JC in X bzw. Y. Die Strecken XY und JD schneiden sich in P. Sei Q der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade BC. Zeige, dass die Innenwinkelhalbierende (Innenwinkelsymmetrale) des Winkels $\sphericalangle QAP$ senkrecht auf die Gerade XY steht.

Bemerkung: Der A-Ankreis des Dreiecks ABC ist derjenige Kreis außerhalb des Dreiecks, der die Geraden AB und AC und die Strecke BC berührt.

Aufgabe T–7

Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die es positive ganze Zahlen $a > b$ mit

$$n = \frac{4ab}{a-b}$$

gibt.

Aufgabe T–8

Seien A und B positive ganze Zahlen. Wir betrachten eine Folge positiver ganzer Zahlen $(x_n)_{n\geq 1}$, für die

$$x_{n+1} = A \cdot \operatorname{ggT}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt. Zeige, dass in dieser Folge nur endlich viele verschiedene Werte vorkommen.

Bemerkung: Dabei bezeichnet $\operatorname{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler zweier positiver ganzer Zahlen a und b.