Problème T–1

Soient $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers et $\mathbb{Z}_{>0}$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs.

(a) Une fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est appelée $\mathbb{Z}$-*slovaque* si elle satisfait $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$. Déterminer le plus grand nombre possible de valeurs distinctes parmi $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, où f est une fonction $\mathbb{Z}$-slovaque.

(a) Une fonction $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ est appelée $\mathbb{Z}_{>0}$-*slovaque* si elle satisfait $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Déterminer le plus grand nombre possible de valeurs distinctes parmi $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, où f est une fonction $\mathbb{Z}_{>0}$-slovaque.

Problème T–2

Soient a, b, c et d des nombres réels strictement positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4,$$

et déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) pour lesquels c'est une égalité.

Problème T–3

Trouver le plus petit nombre entier b avec la propriété suivante : Pour chaque manière de colorer b cases d'un échiquier 8×8 en vert, on peut placer 7 fous sur 7 cases vertes tels qu'aucune paire de fous ne s'attaque entre eux.

Remarque. Deux fous s'attaquent entre eux s'ils sont sur la même diagonale.

Problème T–4

Soit $c \geq 4$ un nombre entier pair. Dans une ligue de football, chaque équipe a un uniforme domicile et un uniforme extérieur. Chaque uniforme domicile est coloré en deux couleurs différentes et chaque uniforme extérieur est coloré en une couleur. L'uniforme extérieur d'une équipe ne peut pas être coloré en une couleur qui fait partie de l'uniforme domicile. Il y a au plus c couleurs distinctes sur l'ensemble des uniformes. Si deux équipes ont les mêmes deux couleurs sur leur uniforme domicile, elles ont des couleurs différentes sur leur uniforme extérieur.

On dit que deux uniformes *s'entrechoquent* si une couleur apparait sur les deux. On suppose que pour toute équipe X dans la ligue, il n'y a pas d'équipe Y dans la ligue telle que l'uniforme domicile de X s'entrechoque avec les deux uniformes de Y. Déterminer le plus grand nombre possible d'équipes dans la ligue.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.

Problème T–5

On nous donne un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les angles ne sont pas droits. On suppose qu'il y a des points P, Q, R, S sur ses côtés AB, BC, CD, DA, respectivement, tels que $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. De plus, on suppose que les droites PR, SQ, AC s'intersectent en un unique point. Montrer que les points P, Q, R, S sont cocycliques.

Problème T–6

Soit ABC un triangle aigu tel que $AB < AC$. On appelle J le centre du cercle exinscrit opposé à A. Soit D la projection de J sur la droite BC. Les bissectrices intérieures des angles BDJ et JDC intersectent les droites BJ et JC en X et Y, respectivement. Les segments XY et JD s'intersectent en P. Soit Q la projection de A sur la droite BC. Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle QAP est perpendiculaire à la droite XY.

Remarque. Le cercle exinscrit opposé à A est le cercle tangent aux droites AB, CA et au segment BC, qui est à l'extérieur du triangle ABC.

Problème T–7

Trouver tous les nombres entiers strictement positifs n tels qu'il existe des nombres entiers strictement positifs $a > b$ satisfaisant

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Problème T–8

Soient A et B des nombres entiers strictement positifs. On considère une suite de nombres entiers strictement positifs $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$x_{n+1} = A \cdot \operatorname{pgcd}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Montrer que la suite atteint un nombre fini de valeurs.

Remarque. Ici $\operatorname{pgcd}(a, b)$ désigne le plus grand commun diviseur des nombres entiers strictement positifs a et b.