Příklad T–1

Označme $\mathbb{Z}$ množinu všech celých čísel a $\mathbb{Z}_{>0}$ množinu všech kladných celých čísel.

(a) Funkci $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nazveme $\mathbb{Z}$-*dobrou*, pokud splňuje $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$. Určete největší možný počet různých hodnot, které se mohou objevit mezi $f(1), f(2), \dots, f(2023)$, kde f je $\mathbb{Z}$-dobrá funkce.

(b) Funkci $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ nazveme $\mathbb{Z}_{>0}$-*dobrou*, pokud splňuje $f(a^2+b) = f(b^2+a)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Určete největší možný počet různých hodnot, které se mohou objevit mezi $f(1), f(2), \dots, f(2023)$, kde f je $\mathbb{Z}_{>0}$-dobrá funkce.

Příklad T–2

Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující $abcd = 1$. Dokažte, že

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4$$

a určete všechny čtveřice (a, b, c, d), pro které nastává rovnost.

Příklad T–3

Najděte nejmenší celé číslo b s následující vlastností: Pro každé obarvení přesně b čtverečků šachovnice 8×8 nazeleno, můžeme umístit 7 střelců na 7 zelených políček tak, aby se žádní dva střelci neohrožovali.

Poznámka. Dva střelci se ohrožují, pokud jsou na stejné diagonále.

Příklad T–4

Nechť $c \geq 4$ je sudé celé číslo. Ve slovenské fotbalové lize má každý tým domácí a hostující dres. Každý domácí dres je obarven dvěma různými barvami a každý hostující dres je obarven jednou barvou. Hostující dres nemůže mít stejnou barvu jako jedna z barev použita na domácím dresu. Na všech dresech dohromady je použito nejvýše c barev. Pokud dva týmy mají stejné obě barvy na jejich domácích dresech, pak mají různou barvu hostujícího dresu.

Řekneme, že dvojice dresů *se bije*, pokud má nějakou společnou barvu. Předpokládejme, že pro každý tým X v lize platí, že neexistuje tým Y takový, že domácí dres X se bije s oběma dresy týmu Y. Určete největší možný počet týmů v lize.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.

Příklad T–5

Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož vnitřní úhly nejsou pravé. Předpokládejme, že body P, Q, R, S leží postupně na stranách AB, BC, CD, DA tak, že $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Navíc předpokládejme, že se přímky PR, SQ, AC protínají v jednom bodě. Dokažte, že body P, Q, R, S leží na jedné kružnici.

Příklad T–6

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s $|AB| < |AC|$. Označme J střed kružnice připsané ke straně BC trojúhelníku ABC a označme D kolmý průmět bodu J na přímku BC. Osy vnitřních úhlů BDJ a JDC protínají přímky BJ a JC postupně v bodech X a Y. Úsečky XY a JD se protínají v bodě P. Označme Q kolmý průmět bodu A na přímku BC. Dokažte, že vnitřní osa úhlu QAP je kolmá na přímku XY.

Poznámka. Kružnice připsaná ke straně BC trojúhelníku ABC je vnější kružnice trojúhelníku, která se dotýká přímek AB, AC a úsečky BC.

Příklad T–7

Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která existují kladná celá čísla $a > b$ splňující

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Příklad T–8

Nechť A a B jsou kladná celá čísla. Uvažujme posloupnost kladných celých čísel $(x_n)_{n\geq 1}$ splňující

$$x_{n+1} = A \cdot \mathrm{NSD}(x_n, x_{n-1}) + B \text{ pro každé } n \geq 2.$$

Dokažte, že prvky dané posloupnosti nabývají pouze konečně mnoha různých hodnot.

Poznámka. Pomocí $\mathrm{NSD}(a, b)$ značíme největší společný dělitel kladných celých čísel a a b.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.