Zadatak T–1

Neka je $\mathbb{Z}$ skup svih cijelih brojeva, a $\mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva.

(a) Funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je $\mathbb{Z}$-*dobra* ako vrijedi $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ za sve $a, b \in \mathbb{Z}$. Odredite najveći mogući broj različitih vrijednosti koje se mogu pojaviti među $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$ za $\mathbb{Z}$-dobru funkciju f.

(b) Funkcija $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ je $\mathbb{Z}_{>0}$-*dobra* ako vrijedi $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ za sve $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Odredite najveći mogući broj različitih vrijednosti koje se mogu pojaviti među $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$ za $\mathbb{Z}_{>0}$-dobru funkciju f.

Zadatak T–2

Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $abcd = 1$. Dokažite da je

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geqslant 4$$

i odredite sve takve četvorke (a, b, c, d) za koje vrijedi jednakost.

Zadatak T–3

Odredite najmanji prirodan broj b sa sljedećim svojstvom: Za svako bojenje točno b polja 8×8 šahovske ploče u zeleno, moguće je postaviti 7 lovaca na 7 zelenih polja tako da se nikoja dva lovca međusobno ne napadaju.

Napomena. Dva lovca se napadaju ako se nalaze na istoj dijagonali.

Zadatak T–4

Neka je $c \geqslant 4$ paran prirodni broj. U nekoj nogometnoj ligi, svaka ekipa ima domaći dres i gostujući dres. Svaki domaći dres je obojen u dvije različite boje, a svaki gostujući dres je obojen u jednu boju. Gostujući dres ekipe ne može biti obojen u neku od boja s njenog domaćeg dresa. Ukupno se na svim dresovima pojavljuje najviše c različitih boja. Ako neke dvije ekipe imaju obje iste boje na domaćim dresovima, onda imaju različito obojene gostujuće dresove.

Kažemo da se par dresova *preklapa* ako se neka boja pojavljuje na oba dresa. Pretpostavimo da za svaku ekipu X iz lige, u ligi ne postoji ekipa Y takva da se domaći dres ekipe X preklapa s oba dresa ekipe Y. Odredite najveći mogući broj ekipa u ligi.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.

Zadatak T–5

Dan je konveksni četverokut $ABCD$ čiji kutevi nisu pravi. Pretpostavimo da postoje točke P, Q, R, S redom na njegovim stranicama AB, BC, CD, DA, takve da vrijedi $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Nadalje, pretpostavimo da se pravci PR, SQ, i AC sijeku u jednoj točki. Dokažite da točke P, Q, R, S leže na kružnici.

Zadatak T–6

Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Neka je J središte pripisane kružnice trokuta ABC nasuprot vrha A. Neka je D projekcija točke J na pravac BC. Simetrale unutarnjih kuteva $\sphericalangle BDJ$ i $\sphericalangle JDC$ sijeku pravce BJ i JC redom u točkama X i Y. Dužine XY i JD se sijeku u točki P. Neka je Q projekcija točke A na pravac BC. Dokažite da je simetrala unutarnjeg kuta $\sphericalangle QAP$ okomita na pravac XY.

Napomena. Pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrha A je kružnica izvan trokuta koja dodiruje pravce AB i AC te dužinu BC.

Zadatak T–7

Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi $a > b$ takvi da je

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

Zadatak T–8

Neka su A i B prirodni brojevi. Promotrimo niz prirodnih brojeva $(x_n)_{n \geqslant 1}$ takav da vrijedi

$$x_{n+1} = A \cdot \mathrm{M}(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{za svaki } n \geqslant 2.$$

Dokažite da niz poprima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.

Napomena. Sa $\mathrm{M}(a, b)$ označavamo najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a i b.