Naloga I–1

Naj $\mathbb{R}$ označuje množico vseh realnih števil. Za vsak par nenegativnih realnih števil (α, β), za kateri velja $\alpha + \beta \geqslant 2$, poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo neenakosti

$$f(x)f(y) \leqslant f(xy) + \alpha x + \beta y$$

za vsa realna števila x in y.

Naloga I–2

Določi vsa naravna števila $n \geqslant 3$, za katere je možno narisati n tetiv ene krožnice, tako da je vseh $2n$ krajišč različnih in vsaka tetiva seka natanko k drugih tetiv, če je;

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Opomba. Tetiva krožnice je daljica, ki ima obe krajišči na krožnici.

Naloga I–3

Naj bo ABC trikotnik s središčem včrtane krožnice I. Včrtana krožnica ω trikotnika ABC je tangentna na stranico BC v točki D. Z E in F označimo točki, za kateri velja $AI \parallel BE \parallel CF$ in $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90°$. Premici DE in DF zaporedoma sekata ω znova v točkah E' in F'. Dokaži, da je $E'F' \perp AI$.

Naloga I–4

Naj bosta n in m naravni števili. Množici S naravnih števil rečemo (n, m)-*kozja*, če zadošča naslednjim pogojem:

(i) Velja $m \in S$.
(i) Za vsak $a \in S$ so vsi pozitivni delitelji števila a tudi elementi S.
(i) Za vsaki različni števili $a, b \in S$ velja $a^n + b^n \in S$.

Določi vse pare (n, m), za katere je množica narvnih števil edina (n, m)-kozja množica.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.