Úloha I–1

Nech $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Pre všetky dvojice (α, β) nezáporných reálnych čísel, pre ktoré $\alpha + \beta \geq 2$, nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

pre všetky reálne čísla x, y.

Úloha I–2

Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré možno nakresliť n tetív jednej kružnice tak, že všetkých ich $2n$ koncových bodov je navzájom rôznych a každá tetiva pretína práve k iných tetív, pre

(a) $k = n - 2$,

(b) $k = n - 3$.

Poznámka. Tetiva kružnice je úsečka, ktorej oba koncové body ležia na danej kružnici.

Úloha I–3

Nech ABC je trojuholník s vpísanou kružnicou ω so stredom v bode I. Kružnica ω sa dotýka strany BC v bode D. Označme E, F body spĺňajúce $AI \parallel BE \parallel CF$ a $|\measuredangle BEI| = |\measuredangle CFI| = 90°$. Priamky DE a DF pretínajú druhýkrát kružnicu ω postupne v bodoch E' a F'. Dokážte, že $E'F' \perp AI$.

Úloha I–4

Nech n, m sú kladné celé čísla. Množinu kladných celých čísel S nazývame (n, m)-*dobrá*, ak spĺňa nasledovné tri podmienky:

(i) Platí $m \in S$.

(ii) Pre každé číslo $a \in S$ patria do S aj všetky jeho kladné delitele.

(iii) Pre všetky navzájom rôzne čísla $a, b \in S$ platí $a^n + b^n \in S$.

Nájdite všetky dvojice (n, m), pre ktoré je množina všetkých kladných celých čísel jedinou (n, m)-dobrou množinou.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.