Zadanie I–1

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Dla każdej pary (α, β) nieujemnych liczb rzeczywistych spełniających $\alpha + \beta \geqslant 2$ wyznaczyć wszystkie funkcje $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x)f(y) \leqslant f(xy) + \alpha x + \beta y$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

Zadanie I–2

Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$, dla których można narysować takich n cięciw na jednym okręgu, że ich $2n$ końców jest parami różnych i każda cięciwa przecina dokładnie k innych cięciw dla:

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Uwaga. Cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego obydwa końce znajdują się na okręgu.

Zadanie I–3

Punkt I jest środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ω jest styczny do prostej BC w punkcie D. Niech E i F będą punktami spełniającymi $AI \parallel BE \parallel CF$ oraz $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90°$. Proste DE i DF przecinają ponownie okrąg ω odpowiednio w punktach E' i F'. Udowodnić, że $E'F' \perp AI$.

Zadanie I–4

Niech n i m będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Powiemy, że zbiór S dodatnich liczb całkowitych jest (n, m)-*dobry*, jeśli spełnione są następujące trzy warunki:

(i) Zachodzi $m \in S$.
(ii) Dla każdego $a \in S$ wszystkie dodatnie dzielniki liczby a także należą do S.
(iii) Dla każdych różnych liczb $a, b \in S$ zachodzi $a^n + b^n \in S$.

Wyznaczyć wszystkie takie pary (n, m), że jedynym (n, m)-dobrym zbiorem jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.