Užduotis I–1

Visų realiųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{R}$. Kiekvienai realiųjų neneigiamų skaičių porai (α, β), kuriai $\alpha + \beta \geq 2$, nustatykite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

su visais realiaisiais x ir y.

Užduotis I–2

Raskite visus natūraliuosius $n \geq 3$, kuriems įmanoma taip nubrėžti vieno apskritimo n stygų, kad jokie du iš šių stygų $2n$ galų nesutaptų ir kad kiekviena styga kirstų lygiai k kitų stygų, kur:

(a) $k = n - 2$;

(b) $k = n - 3$.

Pastaba. Apskritimo styga yra tiesės atkarpa, kurios abu galai priklauso apskritimui.

Užduotis I–3

Taškas I yra trikampio ABC įbrėžtinio apskritimo ω centras. Apskritimas ω liečia tiesę BC taške D. Taškai E ir F tenkina sąlygas $AI \parallel BE \parallel CF$ ir $\angle BEI = \angle CFI = 90°$. Tiesės DE ir DF kerta ω atitinkamai taškuose $E' \neq D$ ir $F' \neq D$. Įrodykite, kad $E'F' \perp AI$.

Užduotis I–4

Tarkime, kad n ir m yra natūralieji skaičiai. Natūraliųjų skaičių aibę S vadinsime (n, m)-*gerąja*, jei galioja šios trys sąlygos:

(i) skaičius m priklauso aibei S;

(ii) kiekvienam $a \in S$ visi skaičiaus a teigiami dalikliai taip pat priklauso aibei S;

(iii) kiekvienai tarpusavyje skirtingų skaičių $a, b \in S$ porai galioja $a^n + b^n \in S$.

Nustatykite visas natūraliųjų skaičių poras (n, m), kurioms visų natūraliųjų skaičių aibė yra vienintelė (n, m)-geroji aibė.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Uždučių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.