I–1. Feladat

Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Minden (α, β) nemnegatív valós számpárra, melyekre $\alpha + \beta \geq 2$ teljesül, határozd meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre minden x és y valós szám esetén teljesül, hogy

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y.$$

I–2. Feladat

Keresd meg az összes olyan $n \geq 3$ egész számot, melyre be lehet húzni egy körnek n húrját úgy, hogy a húrok $2n$ darab végpontja páronként különböző legyen, és minden húr pontosan k másik húrt metsszen, ha

(a) $k = n - 2$.

(b) $k = n - 3$.

Megjegyzés: Egy kör húrja egy olyan szakasz, melynek mindkét végpontja a körre esik.

I–3. Feladat

Jelölje I az ABC háromszög ω beírt körének középpontját. A BC egyenes az ω kört a D pontban érinti. Jelölje E és F azon pontokat, melyekre $AI \parallel BE \parallel CF$ és $BEI\sphericalangle = CFI\sphericalangle = 90°$. A DE és DF egyenesek az ω kört másodszor rendre az E' és F' pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy $E'F' \perp AI$.

I–4. Feladat

Legyenek n és m pozitív egész számok. A pozitív egész számokból álló S halmazt (n, m)*-jónak* nevezzük, ha a következő három feltételt teljesíti:

(i) $m \in S$.

(ii) Bármely $a \in S$ szám esetén a minden pozitív osztója is eleme S-nek.

(iii) Bármely $a, b \in S$ különböző számok esetén $a^n + b^n \in S$.

Határozd meg az összes olyan (n, m) számpárt, melyre a pozitív egész számok halmaza az egyetlen (n, m)-jó halmaz.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.