Einzelwettbewerb
23. August 2023

German version

Aufgabe I–1

Sei $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen. Bestimme für jedes Paar (α, β) nichtnegativer reeller Zahlen, mit der Eigenschaft $\alpha + \beta \geq 2$, alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y.$$

Aufgabe I–2

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, n Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre $2n$ Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau k andere Sehnen schneidet, wobei:

(a) $k = n - 2$,

(b) $k = n - 3$.

Bemerkung: Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

Aufgabe I–3

Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis ω von ABC berühre die Seite BC im Punkt D. Wir bezeichnen mit E und F diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90^\circ$ gelten. Die Geraden DE und DF schneiden ω jeweils ein weiteres Mal in den Punkten E' bzw. F'. Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

Aufgabe I–4

Seien n und m zwei positive ganze Zahlen. Wir nennen eine Menge S positiver ganzer Zahlen (n, m)-*gut*, falls sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(i) Es gilt $m \in S$.

(ii) Für jedes $a \in S$ sind auch alle positiven ganzen Teiler von a Elemente von S.

(iii) Für alle paarweise verschiedenen Zahlen $a, b \in S$ gilt auch $a^n + b^n \in S$.

Bestimme alle Paare (n, m), für die die Menge aller positiven ganzen Zahlen die einzige (n, m)-gute Menge ist.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Fragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.