Problème I–1

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Pour chaque paire (α, β) de nombres réels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta \geq 2$, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

pour tous nombres réels x et y.

Problème I–2

Trouver tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il est possible de dessiner n cordes d'un cercle telles que leurs $2n$ extrémités sont distinctes deux à deux et chaque corde intersecte exactement k autres cordes pour :

(a) $k = n - 2$,

(b) $k = n - 3$

Remarque. Une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont sur le cercle.

Problème I–3

Soit ABC un triangle. On appelle ω le cercle inscrit de ABC et I le centre de ω. Le cercle ω est tangent à la droite BC au point D. Soient E et F les points satisfaisant $AI \parallel BE \parallel CF$ et $\angle BEI = \angle CFI = 90°$. Les droites DE et DF instersectent ω une deuxième fois aux points E' et F', respectivement. Montrer que $E'F' \perp AI$.

Problème I–4

Soient n et m des nombres entiers strictement positifs. On appelle un ensemble S de nombres entiers strictement positifs (n, m)-slovaque s'il satisfait les trois conditions suivantes :

(i) On a $m \in S$.

(ii) Pour tout $a \in S$, tous les diviseurs entiers positifs de a sont aussi des éléments de S.

(iii) Pour tous nombres distincts $a, b \in S$, on a $a^n + b^n \in S$.

Déterminer toutes les paires (n, m) telles que l'ensemble de tous les nombres entiers strictement positifs est le seul ensemble (n, m)-slovaque.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.