Příklad I–1

Označme $\mathbb{R}$ množinu všech reálných čísel. Pro každou dvojici (α, β) nezáporných reálných čísel splňujících $\alpha + \beta \geq 2$, najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro něž platí

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

pro všechna reálná x a y.

Příklad I–2

Najděte všechna celá čísla $n \geq 3$, pro která je možné nakreslit n tětiv jedné kružnice tak, že všech jejich $2n$ koncových bodů je po dvou různých a každá tětiva protne přesně k jiných tětiv pro:

(a) $k = n - 2$,

(b) $k = n - 3$.

Poznámka. Tětiva kružnice je úsečka, jejíž koncové body leží na kružnici.

Příklad I–3

Mějme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou ω a označme její střed I. Kružnice ω se dotýká strany BC v bodě D. Označme E, F body splňující $AI \parallel BE \parallel CF$ a $|\sphericalangle BEI| = |\sphericalangle CFI| = 90°$. Přímky DE a DF protnou podruhé kružnici ω postupně v bodech E' a F'. Dokažte, že platí $E'F' \perp AI$.

Příklad I–4

Mějme dvě kladná celá čísla n a m. Množinu kladných celých čísel S nazveme (n, m)-*dobrou*, pokud splňuje následující tři podmínky:

(i) Platí $m \in S$.

(ii) Pro každé $a \in S$ jsou všichni jeho kladní dělitelé také v množině S.

(iii) Pro každá dvě různá čísla $a, b \in S$ platí $a^n + b^n \in S$.

Určete všechny dvojice (n, m) takové, že množina všech kladných celých čísel je jediná (n, m)-dobrá množina.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.