Zadatak I–1

Neka je $\mathbb{R}$ skup svih realnih brojeva. Za svaki par nenegativnih realnih brojeva (α, β) takav da je $\alpha + \beta \geqslant 2$, odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(x)f(y) \leqslant f(xy) + \alpha x + \beta y$$

za sve realne brojeve x i y.

Zadatak I–2

Odredi sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje je moguće nacrtati n tetiva na nekoj kružnici tako da je njihovih $2n$ krajnjih točaka u parovima različito i svaka tetiva siječe točno k drugih tetiva, ako je:

(a) $k = n - 2$,

(b) $k = n - 3$.

Napomena. Tetiva na kružnici je dužina čije obje krajnje točke leže na toj kružnici.

Zadatak I–3

Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I. Upisana kružnica ω od ABC dodiruje pravac BC u točki D. Označimo s E i F točke za koje je $AI \parallel BE \parallel CF$ i $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90°$. Pravci DE i DF sijeku ω ponovno redom u točkama E' i F'. Dokaži da je $E'F' \perp AI$.

Zadatak I–4

Neka su n i m prirodni brojevi. Za skup prirodnih brojeva S kažemo da je (n, m)-*dobar* ako zadovoljava sljedeća tri uvjeta:

(i) Vrijedi $m \in S$.

(ii) Za sve $a \in S$, svaki pozitivan djelitelj od a je također u skupu S.

(iii) Za sve međusobno različite $a, b \in S$ vrijedi $a^n + b^n \in S$.

Odredi sve parove (n, m) takve da je skup svih prirodnih brojeva jedini (n, m)-dobar skup.